Untersuchungen über ein Sterbegesetz

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

genehmigt von

der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

von

Richard Käding

aus Stettin

Tag der mündlichen Prüfung: 10. XI. 1937.
Tag der Promotion: 8. II. 1938

Druck: Karl u. Richard Hoffmann, Bln.-Charlottenburg, Schillerstr. 44.

N 99

Referenten: Prof. Dr. Riebesell
Prof. Dr. Klose

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhalt.

		Seite
1.	Allgemeines über Sterbegesetze	5
2.	Vergleich der Häufigkeitskurve der mittleren Alter beim Tod mit der zugehörigen Gauss-Kurve nach der ω^2-Methode	9
3.	Das Gumbelsche Gesetz	13
4.	Kritik des Gumbelschen Gesetzes	15
5.	Zusammenhang zwischen Häufigkeitskurven und der Gauss'schen Normalkurve nach Keynes	17
6.	Ein Approximationsverfahren durch die cos-Funktion	23
7.	Vergleich des Verfahrens mit dem Gumbelschen Gesetz	25
8.	Zusammenfassung	28
9.	Die säkularen Sterblichkeitsänderungen	29
10.	Die säkularen Aenderungen der Gompertz-Makehamschen Konstanten	31
11.	Literatur	35

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543924_0096

1. Allgemeines über Sterbegesetze.

Schon bald nachdem der englische Astronom E. Halley[1]) die ersten wissenschaftlich bearbeiteten Sterbetafeln herausgegeben hatte, stellte De Moivre[2]) die erste Hypothese über das menschliche Absterben auf. De Moivre nahm an, daß die Zahl der Ueberlebenden vom 12. bis zum 86. Jahre (Lebensende) eine arithmetische Progression mit konstanter Differenz bildeten. Seit der Zeit haben zahlreiche Mathematiker versucht, das Absterben in einem geschlossenen mathematischen Ausdruck wiederzugeben. Viele Autoren glaubten, in ihrer Formel das Naturgesetz der menschlichen Sterblichkeit als mathematisches Gesetz gefunden zu haben. Zum mindesten glaubten sie an die Existenz eines solchen Gesetzes. So schreibt Makeham[3]) im Eingang seiner Arbeit über die Aenderung, die er an dem Gompertzschen Gesetz vornimmt, daß das Gesetz (das Gompertz-Makehamsche)

(1)

$$\mu_x = A + B\,c^x \text{ bzw. } l_x = k\,s^x\,g^{c^x}$$

keineswegs eine vollkommene Darstellung des wirklichen Gesetzes (. . . . of the actual law . . .) sei.

Dabei bedeuten in (1) μ_x die Sterbeintensität und l_x die Anzahl der Lebenden vom Alter x. A, B, k, s, g, c, sind aus der Absterbeordnung näher zu bestimmende Konstanten.

---

1) An Estimate of the Mortality of Mankind. — London Philos. Trans. Bd. 35. Heft 2.

2) Treatise of Annuities on Lives. — London 1724.

3) Of the Law of human Mortality. — Journal of the Inst. of Actuaries 1860.

Die Annahme, daß das Absterben die Wirkung zweier Ursachenkomplexe sei, deren einer in allen Altern gleich stark wirkt, während der andere, indem er den Organismus abnützt und dessen Widerstandskraft herabsetzt, in einer mit dem Alter zunehmenden Weise wirkt, ist zweifellos sinnvoll. Nur dadurch erklärt sich auch die Bedeutung, die das Gompertz-Makehamsche Gesetz erreicht hat. Gerade in letzter Zeit hat es durch zwei Untersuchungen auf ganz anderem Gebiet eine neue Begründung und Stütze gefunden.

Küpfmüller[4]) und Pütter[5]) sind auf Grund physiologischer Untersuchungen zum Gompertzschen bzw. Gompertz-Makehamschen Gesetz gelangt. Bei der Beobachtung von Bakterien, die unter der Wirkung eines zerstörenden Mittels stehen, fand Pütter, daß die Widerstandskraft der Bakterien konstant blieb; d. h. also, daß die Anzahl der toten Bakterien der Anzahl der lebenden — in der Zeitspanne Δt — proportional war.

$$\frac{\text{Anzahl der Toten}}{\text{Anzahl der Lebenden}} = \beta = \text{konstant.}$$

Bezeichnen wir die Anzahl der im Zeitpunkt t lebenden Bakterien mit y(t) und gehen zur Intensität über, betrachten also das Absterben der Bakterien in einem Moment, so erhalten wir

$$\mu_y = -\frac{dy(t)}{y(t)\,dt} = \beta$$

Durch Integration ergibt sich

$$\ln y(t) = -\beta t + c$$

(c = Integrationskonstante)

und mit $c = \ln A$ und Uebergang zur Exponentialfunktion

$$(2) \qquad y(t) = A\,e^{-\beta t}$$

---

4) Zur Analyse der Absterbeordnung. — Zeitschrift: Die Naturwissenschaften 1921.

5) Zur Physiologie der Lebensdauer. — Die Naturwissenschaften 1920.

Aus der Gleichung bestimmt sich somit A für $t = 0$ als die Anzahl der Bakterien zu Beginn des Versuches, β ist der Vernichtungsfaktor.

Ebenso beobachtete Pütter, daß von den Schollen (nach den Erfahrungen der Seefischerei) jährlich ein gewisser stets gleicher Prozentsatz der Lebenden stirbt.

Im Gegensatz hierzu steht die Beobachtung, daß sich bei den Heringen die Wirkung des Alterns in der relativ schwächeren Besetzung der älteren Jahrgänge bemerkbar macht. Da die Widerstandskraft also mit dem Alter abnimmt, müssen wir den Vernichtungsfaktor mit einer Zahl multiplizieren, die 1.) größer als 1 ist und 2.) von der Zeit abhängt, indem sie mit wachsendem Alter zugleich größer wird. Demgemäß setzt Pütter

$$\beta = \beta_1 \cdot e^{\beta_2 t}$$

wo wieder t die Zeit, β_1 den Vernichtungsfaktor und β_2 den Alternsfaktor bedeutet. Pütter setzt formal in seine erste Gleichung ein und erhält somit

$$(3) \qquad y(t) = A \cdot e^{-\beta_1 t \cdot e^{\beta_2 t}}$$

Auch Küpfmüller geht von der Beobachtung von Bakterien aus, die unter dem Einfluß eines zerstörenden Mittels stehen und macht den Ansatz

$$d_x = \alpha \cdot y(t)\, dt$$

(d_x = Anzahl der Toten)

Er setzt nun

$$\alpha = \frac{P}{R}$$

P bedeutet hierin eine konstant bleibende äußere die Bakterien vernichtende Größe und R eine mit dem Alter abnehmende Widerstandskraft. Für die Widerstandsfähigkeit R nimmt er an, daß sie einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung genüge, und kommt auf die Schlußgleichung

$$(4) \qquad y(t) = C \cdot e^{-\gamma \cdot e^{kt}}$$

(In allen Formeln ist t die Zeit; A, C, β, γ, k, sind näher zu bestimmende Konstanten.)

Nun hat Riebesell[6]) bereits darauf hingewiesen, daß es sich bei beiden Gesetzen um nichts Neues handelt, sondern daß sie das Gompertz- bzw. das Gompertz-Makehamsche Gesetz in anderer Form sind.

Setzen wir z. B. in dem Küpfmüllerschen Gesetz

$$y(t) = l_x; \quad C = k$$
$$e^{-\gamma} = g; \quad e^k = c$$

so ergibt sich

$$l_x = k \cdot g^{c^x} \tag{5}$$

das Gompertzsche Gesetz.

Doch trotz der Stütze, die das Gesetz durch diese neuen Untersuchungen gefunden hat, müssen wir uns davor hüten, es als ein wirkliches Gesetz anzusehen. Es bleibt nur eine Näherungsformel, und wir glauben nicht wie Wittstein[7]), daß man „einst aus der Beobachtung weniger Altersklassen eine ganze Sterbetafel aufbauen könne, ebenso wie z. B. die Astronomen aus wenigen Beobachtungen eines Gestirnes dessen ganze Bahn berechnen können". Dieser Glaube war im Zeitalter des Darwinismus nicht verwunderlich. Doch auch heute noch findet man Anklänge an diese Gedankengänge. So bezeichnet Gumbel[8]) seine analytische Formel, die die Ueberlebenden als Häufigkeit der mittleren Alter beim Tode darstellt: „Das Zufallsgesetz des Sterbens". Während jedoch Gumbel anerkennt, daß eine vollständige naturwissenschaftliche Erfassung der Sterblichkeit nicht möglich ist, und sie nur durch die Wirkung des Faktors „Altern" approximieren will, sagt Streit[9]) in seiner Kritik des Gumbelschen Zufallsgesetzes: „Wir wollen nicht etwa sagen, daß es undenkbar sei, mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein wirklich sinnvolles Absterbegesetz aufzustellen". Wir werden weiter unten darauf zurückkommen.

[6]) Nochmals die Analysis der Absterbeordnung. — Die Naturwissenschaften 1921.

[7]) Das mathematische Gesetz der menschlichen Sterblichkeit. — Hannover 1883.

[8]) Das Zufallsgesetz des Sterbens. — Leipzig, Berlin 1932.

[9]) Das Gumbelsche Absterbegesetz. — Diss. Bern 1934.

2. Vergleich der Häufigkeitskurve der mittleren Alter beim Tod mit der zugehörigen Gauss'schen Kurve nach der ω^2-Methode.

Bevor wir auf die Gumbel'sche Ableitung eingehen, wollen wir einmal ganz schematisch prüfen, ob die mittleren Alter beim Tod analog dem Zufallsgesetz verteilt sind. Das mittlere Alter beim Tod oder anders ausgedrückt das mittlere Sterbealter der über x-jährigen erhält man, indem man zu dem betreffenden Alter die Lebenserwartung addiert.

$$m_x = x + \overset{\circ}{e}_x \tag{6}$$

mit

$$\overset{\circ}{e}_x = \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \dots}{l_x} \tag{7}$$

Da wir wegen der besonderen Verhältnisse in den jüngeren Altern von diesen Altern absehen müssen, rechnen wir vom Alter 20 an. Wir fragen also, ob die Reihe folgender beobachteter Zahlen einem Kollektiv entstammt, daß eine Gauss'sche Verteilung besitzt.

x	$x + \overset{\circ}{e}_x$	l_x
20	64,14	100 000
30	65,48	96 693
40	67,06	91 840
50	69,47	82 593
60	73,02	65 832
70	78,04	40 074
80	84,55	13 402
90	92,39	1 177

(Die Zahlen sind der Sterbetafel 1926 des Vereins Deutscher Lebensversicherungs-Gesellschaft entnommen.)

Wir können uns mit diesen acht Werten begnügen, da sie den charakteristischen Verlauf der Kurve wiedergeben, und die Zwischenwerte angenähert auf der Kurve liegen. Um unsere beobachteten Werte mit einer Gaussschen Verteilung zu vergleichen, erweitern wir die Reihe symmetrisch nach links. Gleichzeitig legen wir das Koordinatenkreuz so, daß die Ordinatenachse durch den Wert 64,14 geht und erhalten damit den Mittelwert

$$a = 0,$$

Die Durchführung der Berechnung der Streuung zeigt die folgende Tabelle:

x	$x + \overset{0}{e}_x$	z	$m_\varkappa$	z^2	$(z-\alpha)^2 m_\varkappa$
90	92,39	—28,25	1 177	798,06	928 700
80	84,55	—20,41	13 402	416,57	5 583 000
70	78,04	—13,90	40 074	193,21	7 742 700
60	73,02	— 8,88	65 832	78,854	5 191 000
50	69,47	— 5,33	82 593	28,409	2 346 400
40	67,06	— 2,92	91 840	8,526	783 050
30	65,48	— 1,34	96 693	1,796	173 660
20	64,14	± 0	100 000	0	0
30	65,48	+ 1,34	96 693	1,796	173 660
40	67,06	+ 2,92	91 840	8,526	783 050
50	69,47	+ 5,33	82 593	28,409	2 346 400
60	73,02	+ 8,88	65 832	78,854	5 191 000
70	78,04	+13,90	40 074	193,21	7 742 700
80	84,55	+20,41	13 402	416,57	5 583 000
90	92,39	+28,25	1 177	798,06	928 700
			883 222		45 497 020

Es ergibt sich also

$$\sigma^2 = \frac{45497020}{883222}$$

$$\sigma^2 = 51{,}51$$

$$\sigma = 7{,}177$$

Da Gumbel annimmt, daß diese Werte einem Kollektiv entstammen, das eine Gauss'sche Verteilung besitzt, benutzen wir zum Vergleich das ω^2-Verfahren [10]).

Wir vergleichen unsere Reihe mit einer Gauss'schen Verteilung, die in der ursprünglichen Variablen den Mittelwert $\alpha = 0$ und die Streuung $\sigma^2 = 51{,}51$ besitzt.

Die Vergleichsfunktion $\Phi(x)$ (die Gauss'sche Summenfunktion) besitzt die Streuung $\frac{1}{2}$. Es entspricht also unserem z die Größe $x = \frac{z-\alpha}{\sigma\sqrt{2}}$.

$$(8)\quad \omega^2 = \sqrt{2\pi} \sum_{\varkappa=1}^{k} m_\varkappa \left[\varphi_\varkappa + x_\varkappa \Theta_\varkappa + \frac{m-(m'_\varkappa + m'_{\varkappa-1})}{m} \right] - m$$

$$\varphi = \Phi' ; \quad \Phi = \frac{1}{2}\Theta + \frac{1}{2}$$

[10]) v. Mises: Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Leipzig, Wien 1931, S. 332.

Darin bedeuten die m'_x die aufsummierten Häufigkeiten also

$$m'_x = m_1 + m_2 + \ldots + m_x$$

(Zur Durchführung der Rechnung siehe die folgende Tabelle).

I	II	III	IV	V	VI	VII
—2,783	1 177	0,00025	0,0000	0,0013	0,0039	4,5
—2,011	13 402	0,00995	0,0045	0,0178	0,0367	503
—1,369	40 074	0,0864	0,0527	0,0784	0,1216	4 872
—0,875	65 832	0,2624	0,2159	0,1983	0,2570	16 918
—0,525	82 593	0,4283	0,4577	0,3663	0,3803	31 411
—0,288	91 840	0,5239	0,6838	0,5638	0,4893	44 940
—0,132	96 693	0,5545	0,8518	0,7773	0,5447	52 665
0	100 000	0,5642	1,0000	1,0000	0,5642	56 420
+0,132	96 693	0,5545	1,1481	1,2227	0,5447	52 665
+0,288	91 840	0,5239	1,3162	1,4361	0,4893	44 940
+0,525	82 593	0,4283	1,5422	1,6336	0,3803	31 411
+0,875	65 832	0,2624	1,7841	1,8017	0,2570	16 918
+1,369	40 074	0,0864	1,9473	1,9216	0,1216	4 872
+2,011	13 402	0,00995	1,9955	1,9822	0,0367	503
+2,783	1 177	0,00025	1,9999	1,9835	0,0039	4,5
	883 222					359 047

$$\begin{aligned} I &= x \\ II &= m_x \\ III &= \varphi(x) \\ IV &= 1 + \Theta(x) \\ V &= \frac{m'_x + m'_{x-1}}{m} \\ VI &= \varphi + x\left(1 + \Theta_x - \frac{m'_x + m'_{x-1}}{m}\right) \\ VII &= m_x \cdot VI \end{aligned}$$

Der Erwartungswert von ω^2 ergibt sich aus

(9) $$\mathfrak{E}(\omega^2) = 1 + m\,\frac{\Delta^2}{12}$$

mit

$$\Delta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$$

$$\mathfrak{E}(\omega^2) = 1 + \frac{883222}{24\,\sigma^2} = 714{,}4$$

Der beobachtete Wert ist

$$\sqrt{2\pi} \,.\, 359047 - 883222 = 16778$$
$$= 168 \,.\, 10^2$$

Von einer Uebereinstimmung kann keine Rede sein. Am besten zeigt die folgende graphische Darstellung das Mißverhältnis.

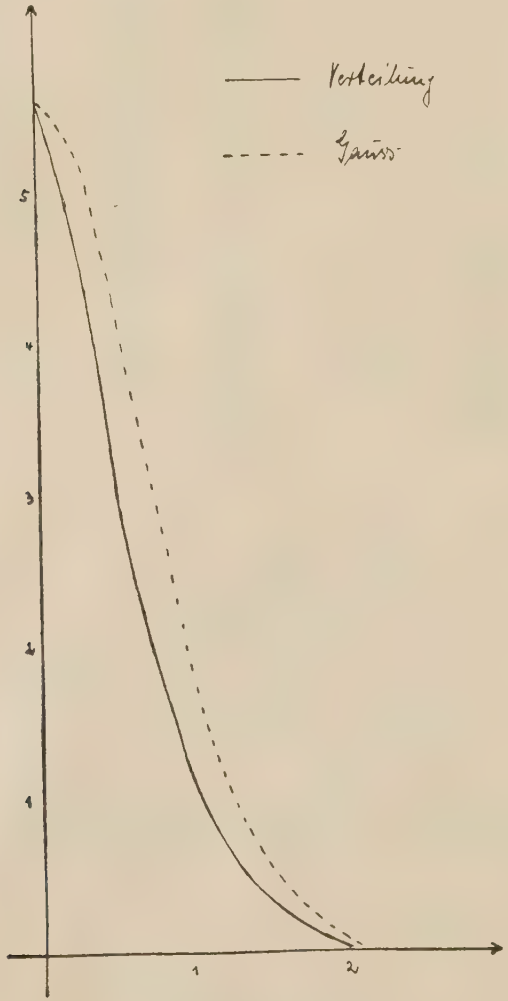

Fig. 1.

3. Das Gumbelsche Gesetz.

Was tut nun Gumbel, um dieses Mißverhältnis zu beseitigen? — Dadurch, daß wir von den jüngeren Altern wegen der Kindersterblichkeit absahen, stellten sich unsere Abszissen durch

$$x = m_x - m_{20};\ m_x = x + \overset{\circ}{e}_x \qquad \text{dar.}$$

Gumbel verschiebt nun die Kurve parallel zur Abszissenachse nach rechts und erhält

$$x = m_x - \overset{\circ}{e}_0.$$

Durch diese Verschiebung beginnt die Gumbel'sche Kurve zwar bei $x = \overset{\circ}{e}_0$, aber andererseits kann er dadurch natürlich nur einen Teil der rechten Hälfte der Gauss'schen Kurve benutzen, wodurch das Charakteristische der Gaussschen Glockenkurve vollkommen verloren geht. Die graphische Darstellung zeigt, ein wie kleiner Teil der Gaussschen Kurve durch diese Verschiebung benutzbar bleibt.

Fig. 2.

Durch geeignete Berechnung zweier Konstanten, die in seiner Ableitung auftreten, versucht Gumbel dann möglichst gute Annäherung an die Gauss'sche Verteilung zu erzielen.

Die Ableitung Gumbels ist Folgende.

Annahme: Die Häufigkeiten der mittleren Alter beim Tod werden durch die Gauss'sche Kurve wiedergegeben. Das heißt, die Häufigkeiten folgen dem Fehlergesetz

$$(10) \qquad \varphi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-A)^2}$$

In unserem Falle

$$l_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x+\mathring{e}_x-H)^2}$$

Mit der Annahme $l_0 = 1$ betrachten wir die Ueberlebenswahrscheinlichkeiten $\frac{l_x}{l_0}$ und erhalten

$$(11) \qquad l_x = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x+\mathring{e}_x-H)^2}$$

Durch Differenzieren und Dividieren ergibt sich

$$-\frac{l'_x}{l_x} = \mu_x = \frac{1}{\sigma^2}[x+\mathring{e}_x-H]\,(1+\mathring{e}'_x)$$

und mit

$$\mu_x = \frac{1+\mathring{e}'_x}{\mathring{e}_x}$$

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{2}\left(H-x+\sqrt{(H-x)^2+4\sigma^2}\right)^2$$

Wir setzen ein und erhalten aus (11)

$$l_x = e^{-\frac{1}{8\sigma^2}\left(x-H+\sqrt{(x-H)^2+4\sigma^2}\right)^2}$$

Setzen wir

$$\frac{1}{2\sigma}\left(x-H+\sqrt{(x-H)^2+4\sigma^2}\right) = u$$

so ergibt sich

$$(12) \qquad l_x = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Dies ist das Gumbelsche Gesetz.

Die beiden Konstanten H und σ sind nun unter der Bedingung der bestmöglichen Anpassung an die gegebene Absterbeordnung zu bestimmen. Beide Konstanten sind von der Dimension eines Alters, und Gumbel zeigt, daß H die Rolle einer Lebenserwartung und σ die Rolle eines mittleren Alters spielt. Ihre Bestimmung ist auf verschiedene Arten möglich. Gumbel gibt als besten Weg die Bestimmung nach der Momentenmethode an. Sie sollen also unter der Bedingung bestimmt werden, daß von einem gewissen Alter x an Inhalt der Sterbetafel d. h. die Summe der über dem Alter x Lebenden

$$S(x) = \int_x^\omega l_x \, dx \tag{13}$$

und Mittelwert

$$\mathring{X}(x) = \frac{\int_x^\omega x \, l_x \, dx}{\int_x^\omega l_x \, dx} \tag{14}$$

erhalten bleiben.

4. Kritik des Gumbel'schen Gesetzes.

H. R. Streit hat in seiner Dissertation[11]) das Gumbelsche Gesetz einer Kritik unterworfen. Er zeigt zunächst, daß es in seiner Annäherung an die betreffende Absterbeordnung weniger leistet als das Makeham'sche Gesetz. Dann setzt er die Gumbel'sche Formel in verschiedene Gleichungen ein, die in der Versicherungspraxis auftreten und zeigt, daß gerade die schwierigeren Probleme beim Gumbel'schen Gesetz sehr kompliziert werden. Das Verbindungsrentenproblem ist mit dem Gumbel'schen Gesetz überhaupt nicht allgemein lösbar.

Da das Makeham'sche Gesetz — wie Streit gezeigt hat — die besseren Resultate liefert, so ist damit schon das Urteil über die Bedeutung des Gumbel'schen Gesetzes für die Versicherungspraxis gegeben.

---

[11]) Siehe Anmerkung Nr. 9.

Doch wie steht es mit der Annahme, die Gumbel zu seiner Ableitung geführt hat? Wir sahen vorher schon, daß Gumbel durch eine einfache Verschiebung der Kurve parallel zur x-Achse eine Annäherung an die Gauss'sche Zufallskurve erzielen will und damit nur einen kleinen Teil dieser Kurve benutzen kann.

Bruns [12]) hat gezeigt, daß sich jede vorgegebene — im übrigen willkürliche Funktion — durch eine Reihe darstellen läßt, deren Glieder durch die Gauss'sche Funktion bzw. deren Ableitungen gegeben sind.

Die Darstellung der Summenfunktion führt zur Brunsschen Normalform der Φ-Reihe. Beschränkt man sie auf das erste Glied, so ergibt sich

$$S(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\Phi(h\,(x-a)) \tag{15}$$

mit

$$\xi = h\,(x-a); \quad dx = \frac{d\xi}{h}$$

$$S(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\xi^2}\, d\xi$$

Es ist aber

$$S(x) = \int_0^{x} l_x\, dx$$

$$\int_0^{x} l_x\, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\xi^2}\, d\xi$$

Differenzieren wir die Gleichung, so erhalten wir

$$l_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\xi^2}$$

oder das Gumbel'sche Gesetz.

Der Fehler, den Gumbel macht, stellt sich als die Ableitungen der Restglieder der Bruns'schen Normalreihe dar. Es ist somit dasselbe, als wenn man z. B. eine Funktion in eine Taylorsche Reihe entwickelt und nur das erste Glied betrachtet. Wenn wir dann sagen, daß dies Glied die erste Annäherung der Funktion ist, so ist das richtig. Es fehlt aber jede Berechtigung — wie Gumbel es tut — von einem sinnvollen Gesetz zu sprechen.

[12]) Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. — Leipzig, Berlin 1906.

5. Zusammenhang zwischen Häufigkeitskurven und der Gauss'schen Normalkurve nach Keynes[13]).

Da jede Verteilung in eine Bruns'sche Reihe entwickelt werden kann, ist die Gauss'sche Normalkurve die erste Näherung jeder beliebigen Verteilung. Andererseits hat Keynes gezeigt, daß man durch Einführung einer bestimmten Mittelwerts-Funktion jede Häufigkeitskurve eines beliebigen Mittelwertes auf die Gauss'sche Normalkurve abbilden kann.

Es sei x eine unbekannte Größe, an der n Messungen (Beobachtungen) die Werte

$$x_1, x_2 \ldots . x_n$$

ergeben haben. Irgend einen bestimmt definierten Mittelwert M sehen wir dann als den „wahren" Wert der Größe x an und bezeichnen

$$z_\nu = x_\nu - M$$

als den Fehler der ν ten Beobachtung.

Die Grundannahme der Fehlertheorie geht nun dahin, daß kleine Fehler häufiger auftreten als große oder anders ausgedrückt: die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten großer Fehler ist sehr klein; denn die relativen Häufigkeiten der einzelnen Fehler können wir als ihre Wahrscheinlichkeiten ansehen. Wir bezeichnen diese Fehlerwahrscheinlichkeit mit

$$w(z_\nu) = w(x_\nu - M).$$

Wir setzen voraus, daß ein Fehlergesetz w(z) existiert d. h. eine Abhängigkeit zwischen der Fehlergröße und ihrer Wahrscheinlichkeit, und daß die Wahrscheinlichkeiten (Fehlerhäufigkeiten) voneinander unabhängig sind. — Mit diesen Annahmen lautet die Keynes'sche Frage: Wie müßte das Fehlergesetz w(z) beschaffen sein, damit irgend ein bestimmt definierter Mittelwert als wahrscheinlichster Wert der beobachteten Größe erscheint? —

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Fehlers z_1 bei der ersten, des Fehlers z_2 bei der zweiten, ... des Fehlers z_n bei der n-ten Beobachtung ist nach den Grundregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

---

[13]) A Treatise on Probability. — London 1921.

$$w(z_1) \cdot w(z_2) \ldots . w(z_n) =$$
$$w(x_1 — M) . w(x_2 — M) \ldots . w(x_n — M)$$

Die Forderung geht nun dahin, daß dies Produkt für M als „wahren" Wert von x ein Maximum wird.

$$\prod_{\nu=1}^{n} w(z_\nu) = \text{Maximum.}$$

Nehmen wir nun noch an, daß w(z) differenzierbar und die Ableitung stetig sei, so können wir unsere Forderung umformen, indem wir das Produkt logarithmieren und dann differenzieren und erhalten

$$(16) \qquad \sum \frac{w'(z_\nu)}{w(z_\nu)} = 0.$$

Die allgemeine Form irgend eines statistischen Mittels definieren wir mit Blaschke[14]) durch

$$n\,\sigma(M) = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma(x_\nu)$$

wo σ eine analytische Funktion ist, für die wir annehmen, daß $y = \sigma(x)$ im Bereich $x_1, x_2, \ldots . x_n$ reell, eindeutig, endlich und stetig ist.

Ersetzen wir das Summenzeichen Σ durch die eckige Klammer [ ], so können wir die Form unseres statistischen Mittels in

$$[\sigma(M) — \sigma(x_\nu)] = 0$$

transformieren.

Für M als den wahren Wert x ergibt sich also die Gleichung

$$(17) \qquad [\sigma(x) — \sigma(x_\nu)] = 0.$$

Keynes gelangt nun zu seinem Fehlergesetz, indem er aus (16) und (17) bildet

$$(18) \qquad \frac{w'(z_\nu)}{w(z_\nu)} = \varphi''(x)\,(\sigma(x) — \sigma(x_\nu))$$

$\varphi(x)$ ist hierbei eine willkürliche Funktion von x die nur wegen der Uebersichtlichkeit des Ergebnisses als zweite

---

[14]) Die statistischen Mittelwerte. — Wirtschaft und Recht der Versich. Beiheft zu Versicherung und Geldwirtschaft. 1925.

Ableitung angesetzt wurde. Wir folgen daher der Ableitung Blaschkes und setzen

(19)

$$\frac{w'(z_\nu)}{w(z_\nu)} = \varphi(x)\,(\sigma(x) - \sigma(x_\nu))$$

Mit $\psi(x)$ als einer willkürlichen Funktion von x_ν erhalten wir

$$\ln w(z_\nu) = \int \varphi(x)\,(\sigma(x) - \sigma(x_\nu))\,dx + \psi(x_\nu)$$

und somit durch Uebergang zur Exponentialfunktion

(I) $$w(z_\nu) = e^{\int \varphi(x)\,(\sigma(x) - \sigma(x_\nu))\,dx + \psi(x_\nu)}$$

Mit der Forderung

$$\prod_{\nu=1}^{n} w(z_\nu) = W(z) = \text{Maximum}$$

ergibt sich

$$W(z) = e^{\int \varphi(x)\,(n\sigma(x) - [\sigma(x_\nu)])\,dx + [\psi(x_\nu)]}$$

$$W(z) = e^{\int n\varphi(x)\,(\sigma(x) - \frac{[\sigma(x_\nu)]}{n})\,dx + [\psi(x_\nu)]}$$

Setzen wir

$$e^{[\psi(x_\nu)]} = K$$

so erhalten wir mit

$$\frac{[\sigma(x_\nu)]}{n} = \sigma(M)$$

(II)

(II) $$W(z) = K \cdot e^{n \int \varphi(x)\,(\sigma(x) - \sigma(M))\,dx}$$

Damit die Gleichung (II) der Maximumsbedingung genügt, muß $W'(z) = 0$ und $W''(z) < 0$ sein.

$$W'(z) = W(z) \cdot n\,\varphi(x)\,(\sigma(x) - \frac{[\sigma(x_\nu)]}{n}) = 0$$

Es muß also

$$n\varphi(x)\,(\sigma(x) - \frac{[\sigma(x_\nu)]}{n}) = 0$$

sein. Der Klammerausdruck ist unsere Mittelwertgleichung (17) also = 0 und erfüllt die 1. Bedingung.

Damit $W''(z) < 0$ ist, ist erforderlich, daß

$$\varphi'(x)\left(\sigma(x) - \frac{[\sigma(x_v)]}{n}\right) + \varphi(x)\,\sigma'(x) < 0$$

Der 1. Summand ist Null, da der Klammerausdruck Null ist.

Daher muß $\varphi(x)\,\sigma'(x) < 0$ sein. $\sigma'(x)$ ist positiv, denn im einfachsten Fall $\sigma(x) = x$ ist $\sigma'(x) = 1$

Es ergibt sich danach als Bedingung für $\varphi(x)$

$$\varphi(x) < 0$$

Betrachten wir $\varphi(x)$ als Gewicht der Beobachtung und setzen in erster Näherung für $\varphi(x)$, $\varphi(x_v)$ ein, so wird

$$\text{(I')} \qquad w(z_v) = e^{\varphi(x_v)\int(\sigma(x)-\sigma(x_v))\,dx + \psi(x_v)}$$

$$W(z) = e^{\int(\sigma(x)[\varphi(x_v)] - [\varphi(x_v)\,\sigma(x_v)])\,dx + [\psi(x_v)]}$$

und mit

$$[\varphi(x_v)] = -k^2$$

$$\frac{[\varphi(x_v)\,\sigma(x_v)]}{[\varphi(x_v)]} = \sigma(M)$$

$$\text{(II')} \qquad W(z) = K\, e^{-k^2\int(\sigma(x)-\sigma(M))\,dx}$$

Setzen wir endlich in (I) $\varphi(x) = \sigma'(x)\varphi_1(x_v)$, so erhalten wir endgültig

$$\text{(III)} \qquad W(z) = K\, e^{-\frac{k^2}{2}(\sigma(x)-\sigma(M))^2}$$

Hierin ist

$$k^2 = -[\varphi_1(x_v)]$$

$$\sigma(M) = \frac{[\varphi_1(x_v)\,\sigma(x_v)]}{[\varphi_1(x_v)]}$$

$$K = e^{[\psi(x_v)]}$$

Die Richtigkeit der Gleichung (III) erkennen wir sofort, wenn wir sie differenzieren. Es ergibt sich

$$W'(z) = W(z) . - k^2 (\sigma(x) - \sigma(M))$$
$$\frac{W'(z)}{W(z)} = - k^2 (\sigma(x) - \sigma(M))$$

Es muß also sein

$$\sigma(x) - \sigma(M) = 0$$

Wir setzen den Ausdruck für $\sigma(M)$ ein, und erhalten

$$\sigma(x) - \frac{[\varphi_1(x_\nu)\sigma(x_\nu)]}{[\varphi_1(x_\nu)]} =$$
$$\frac{[\varphi_1(x_\nu)]\sigma(x) - [\varphi_1(x_\nu)\ \sigma(x_\nu)]}{[\varphi_1(x_\nu)]}$$

Den Zähler können wir aber in unsere Mittelwertsbedingung (17) umformen, er ist danach = 0.

Wir können die Gleichung (III) als die allgemeine Form jeder Häufigkeitskurve bezeichnen. Sie transformiert sich für den einfachsten Fall $\sigma(x) = x$ und $\sigma(M) = a$, — wo a das arithmetische Mittel ist, — in die Gauss'sche Normalkurve. Es ergibt sich somit der Satz:

> „Die Häufigkeitskurve zu irgend einer beliebigen Mittelwertsfunktion ergibt sich aus der Normalkurve mit Hilfe der Abbildung der letzteren durch die Mittelwertsfunktion".

Die verschiedenen Häufigkeitskurven sind demnach nur das durch die jeweiligen Annahmen über den wahrscheinlichsten Mittelwert abgeänderte normale Gauss'sche Fehlergesetz.

Für den Fall des arithmetischen Mittels ergab sich oben das Gauss'sche Normalgesetz. Wollen wir nun irgend ein anderes Mittel als wahrscheinlichsten Wert ansehen, so müssen wir versuchen, diesen Mittelwert so umzuformen, daß er in unsere allgemeine Bedingungsgleichung für den Mittelwert (17) übergeht.

Als Beispiel wollen wir das geometrische Mittel betrachten.

Die Definitionsgleichung des geometrischen Mittels ist

$$M_g = \sqrt[n]{\prod_{\nu=1}^{n} x_\nu}$$

Gleichbedeutend hiermit ist die Wahl des arithmetischen Mittels aus den Logarithmen.

$$n \log M_g = \sum_{\nu=1}^{n} \log x_\nu$$

Daher ist

$$\sigma(x) = \log x$$
$$\sigma(M) = \log M_g$$

In (II') eingesetzt ergibt sich

$$W(z) = K \cdot e^{-k^2 \int (\log x - \log M_g)\, dx}$$

und nach Ausführung der Integration

$$\int (\log x - M_g)\, dx = x (\log x - \log M_g) - x$$

als Häufigkeitskurve für das geometrische Mittel als wahrscheinlichsten Wert

$$(20) \qquad W(z) = K \cdot e^{-k^2 x (\log \frac{x}{M_g} - 1)}$$

Wir haben erkannt, daß wir auf diesem Wege über die Keynes'sche Funktion jede beliebige Häufigkeitskurve auf die Normalkurve abbilden oder umgekehrt die Häufigkeitskurve aus der Normalkurve ableiten können. Doch wie die Funktion $\sigma(x)$ nun beschaffen ist, die diese Abbildung für unseren speziellen Fall der Absterbeordnung leistet, vermögen wir nicht anzugeben. Soviel jedoch können wir sagen, daß der Gumbel'sche Versuch, das Problem mit

$$\sigma(x) = x + \mathring{e}_x$$

zu lösen, gescheitert ist.

Angesichts der Kompliziertheit des Problems sehen wir auch — im Gegensatz zu Streit — es als unmöglich an, jemals eine derartige Funktion, die mit aller Strenge das menschliche Absterben wiedergibt, zu finden.

6. Ein Approximationsverfahren durch die cos-Funktion.

Es ist nicht schwer, auch durch andere Funktionen gute Annäherungen zu erzielen. So kann man z. B. durch ein einfaches Verfahren mit Hilfe der cos-Funktion eine bessere Annäherung erreichen, als sie das Gumbelsche Gesetz liefert. Das Bild der cos-Funktion zeigt genau wie die Glockenkurve eine gewisse Aehnlichkeit mit dem Bild der l_x. Die graphische Darstellung (siehe Fig. III) erläutert, wie man durch den cos sehr gute Annäherung an die gegebene Verteilung erzielen kann.

Das Verfahren ist wie folgt:

Wir nehmen die cos-Funktion von 0 bis π, und teilen sie in die Abschnitte 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ bis π. Durch den Punkt mit der Ordinate $\frac{l_x}{2}$ legen wir den Punkt $\frac{\pi}{2}$ fest. Damit bestimmt sich die Abszisse des gestrichelten Koordinatenkreuzes. Um nun mit unserer Verteilung (in diesem Falle die Sterbetafel M u. W I 23) möglichst gute Uebereinstimmung zu erzielen, legen wir die cos-Funktion so, daß sich auch die Punkte $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ mit der gegebenen Verteilung decken. Dadurch bestimmen sich die Punkte 0 und π und somit das gestrichelte Koordinatensystem. Die beiden Abschnitte 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ bis π haben also verschiedenen Maßstab.

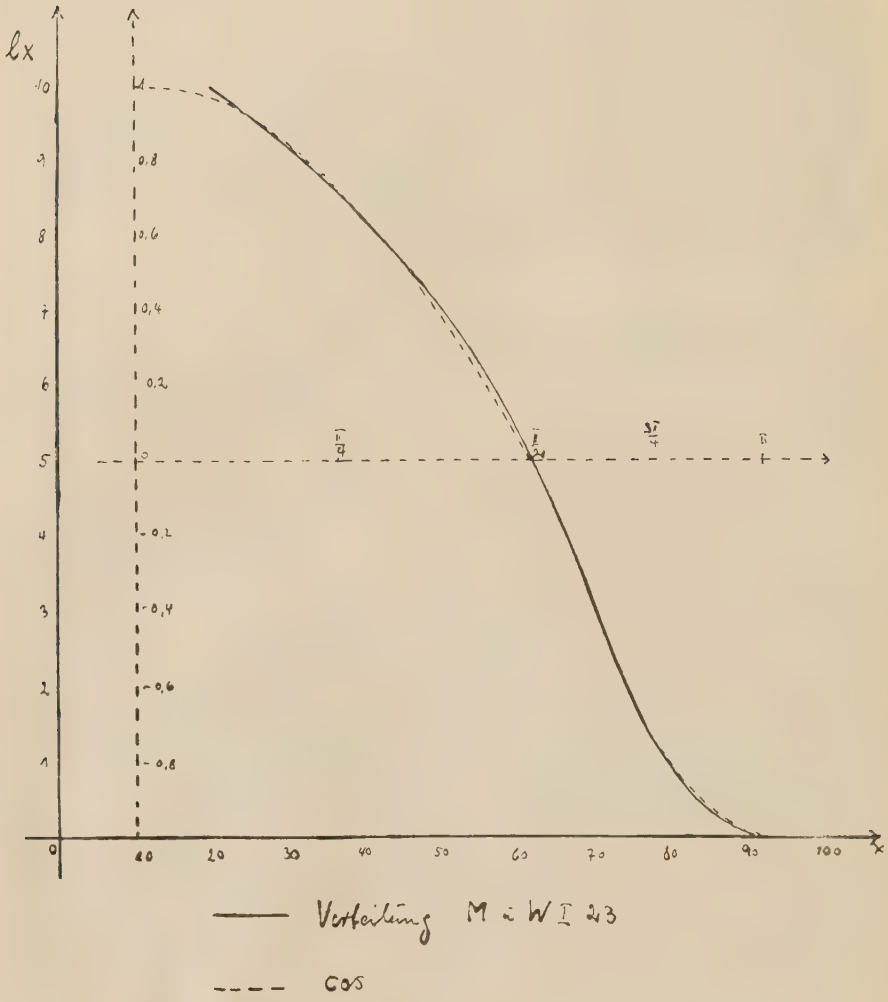

Fig. 3.

(In der graphischen Darstellung ist $l_x = 10$ als $l_x = 100\,000$ anzusehen.) In den folgenden Darstellungen werden wir das gestrichelte Koordinatenkreuz fortlassen und den Maßstab als innere Koordinateneinteilung angeben.

7. Vergleich des Verfahrens mit dem Gumbelschen Gesetz.

Man erkennt am besten, welch gute Annäherung durch dies Verfahren erzielt wird, wenn man unsere graphische Darstellung mit einer Gumbelschen vergleicht. An dem folgenden Beispiel wollen wir auch quantitativ feststellen, ob das Gumbelsche Gesetz oder unser Verfahren die bessere Annäherung erzielt.

Schon die graphische Darstellung zeigt, daß die Annäherung durch die cos-Funktion nach unserem Verfahren — bis auf die Alter 50 bis 60 — bessere Resultate liefert.

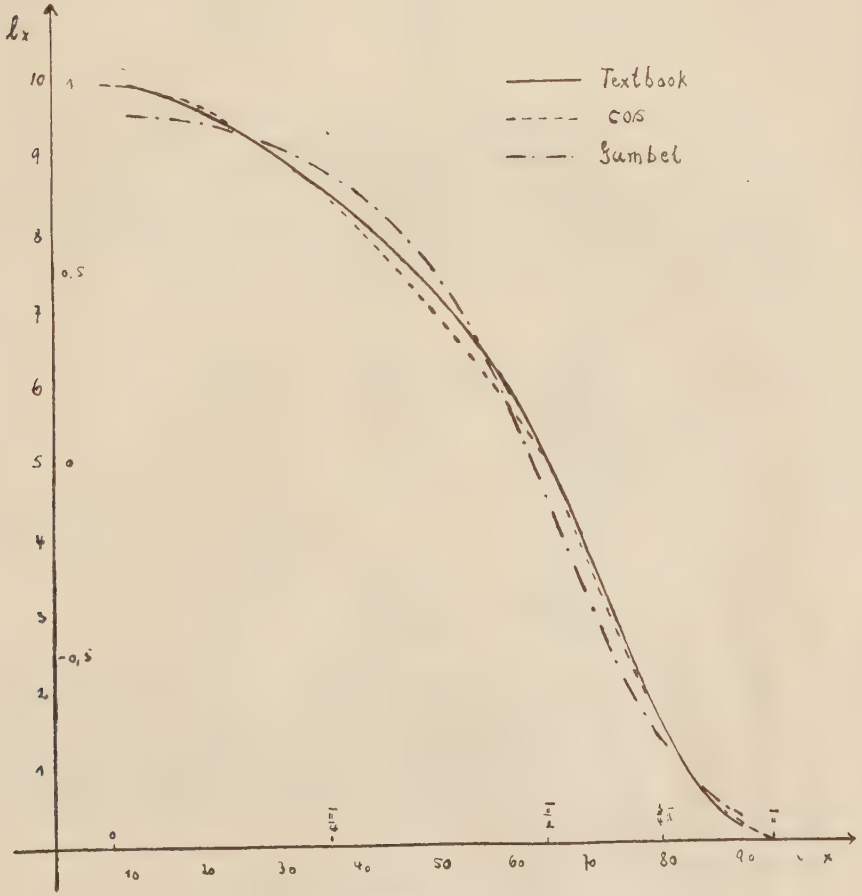

Fig. 4.

Berechnen wir — nachdem wir die cos-Kurve durch $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ festgelegt haben — aus einer cos-Tafel die Werte in den richtigen Koordinaten, so ergibt sich folgende Gegenüberstellung:

x	Textb.[15])	Gumbel	cos	w_x[16])
10	100 000	96 322	99 933	0,18072
20	96 155	94 607	97 065	0,17378
30	89 873	91 615	90 700	0,16242
40	82 230	86 004	81 265	0,14861
50	72 743	75 274	69 920	0,13146
60	58 978	56 722	56 215	0,10659
70	37 926	32 754	35 780	0,06854
80	13 919	12 994	13 730	0,02516
90	1 503	3 348	1 380	0,00272

Wir erkennen deutlich die bessere Annäherung an die Textbookwerte durch unser Verfahren. Um den Unterschied der beiden Verfahren noch besser hervorzuheben, stellen wir in der folgenden Tabelle die absoluten Fehler zu den Werten aus dem Textbook einander gegenüber.

Gumbel	cos
3689	67
1548	910
1742	827
3774	965
2531	2823
2256	2763
5172	2146
925	189
1845	123

Wie wir schon an der graphischen Darstellung erkannten, zeigt das Gumbelsche Gesetz nur in den Altern 50 bis 60 eine leichte Ueberlegenheit; während im ganzen sonstigen Verlauf unser cos-Verfahren die bei weitem bessere Annäherung liefert.

---

15) Institute of Actuaries' Text Book, London 1887.

16) w_x = empirische Wahrscheinlichkeiten der Spalte 2.

Am klarsten zeigt sich jedoch die Ueberlegenheit unseres Verfahrens über das Gumbelsche Gesetz, wenn wir die Abweichung der Gumbelschen theoretischen Reihe bzw. der Reihe nach unserem cos-Verfahren mit der beobachteten Reihe aus dem Textbook nach dem χ^2-Verfahren prüfen.

Die Berechnung ist wie folgt:

$$\chi^2 = \sum_{\varkappa}^{k} \frac{m}{\omega_\varkappa} \left(\frac{m_\varkappa}{m} - \omega_\varkappa \right)^2$$

$$m = m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_k$$

Gumbel

$\varkappa$	$m_\varkappa$	$m_\varkappa^2 : \omega_\varkappa$	
10	96 311	523 260	
20	94 607	515 050	
30	91 615	516 770	
40	86 004	497 750	
50	75 274	431 010	$\cdot 10^5$
60	56 722	301 845	
70	32 754	156 525	
80	12 994	67 106	
90	3 348	4 121	
	549 629	3 003 437 . 10^5	

Somit

$$\chi^2 = \frac{3003437}{549629} - 549629$$

$$\chi^2 = -3179$$

Gegen den theoretischen Wert

$$k - 1 \pm 0{,}674 \sqrt{2(k-1)} =$$

$$8 \pm 2{,}5.$$

Die Uebereinstimmung ist sehr schlecht, sofern man überhaupt von einer Uebereinstimmung sprechen kann.

cos

$\varkappa$	$m_\varkappa$	$m^2_\varkappa : \omega_\varkappa$	
10	99 933	552 600	
20	97 065	541 840	
30	90 700	506 520	
40	81 265	444 410	
50	69 920	371 875	$\cdot 10^5$
60	56 215	296 475	
70	35 780	186 783	
80	13 730	74 923	
90	1 380	7 001,5	
	545 988	2 982 427,5 . 10^5	

Somit

$$\chi^2 = \frac{2982427{,}5}{545988} - 545988$$

$$\chi^2 = 262$$

Auch wir haben also keine Uebereinstimmung zu verzeichnen; doch beträgt unser Fehler nur etwa $^1/_{12}$ des Gumbelschen.

Außerdem können wir unser Verfahren noch verbessern, ja es beliebig genau machen, indem wir noch einige andere Werte einschalten und statt zweier cos-Aeste deren drei oder mehr betrachten und ferner noch die Stellen, an denen sich diese Aeste treffen, durch einen überdeckenden Ast ausgleichen. —

8. Zusammenfassung.

Gumbel schreibt am Schlusse seiner Arbeit: „Unsere Hypothese (— daß die mittleren Alter beim Tod analog dem Zufallsgesetz verteilt sind —) ist in dem Ausmaße, wie sich solche Hypothesen überhaupt verifizieren lassen, durch die Erfahrung bestätigt".

Wenn also die Tatsache einer gewissen Annäherung genügt, Gumbel von einem Zufallsgesetz des Sterbens sprechen zu lassen, so könnten wir mit demselben Recht von einem „cos-Gesetz des Sterbens" sprechen. Doch wir wollen im Gegenteil betonen, daß es sich im Grunde — wie auch bei Gumbel — um nichts weiter handelt, als um ein mathematisches Verfahren, welches zwar eine gewisse An-

näherung an die bestehenden Verhältnisse geliefert hat, das uns aber dennoch nicht einen Schritt weiter in der Erkenntnis und in der Erforschung des Problems der menschlichen Sterblichkeit gebracht hat.

9. Die säkularen Sterblichkeitsschwankungen.

In diesem Zusammenhang wollen wir noch auf einen anderen Vergleich mit einer Gauss'schen Glockenkurve eingehen. Am Schlusse eines Vortrages den Lorenz [17]) im Deutschen Verein für Versicherungs-Wissenschaft hielt, kam der Vortragende auf die Sterblichkeitsgewinne der Versicherungsgesellschaften zu sprechen. Er zeigte an Hand einer graphischen Darstellung (siehe Fig. V), wie stark die Verlagerung der Sterbefälle aus den jüngeren Altern in die Alter um die wahrscheinlichste Lebensdauer in den letzten Jahrzehnten gewesen ist.

Einem Gedanken von Lexis [18]) folgend, schließt Lorenz daraus, daß die Verlagerung einem Grenzfall zustrebt der durch die punktiert gezeichnete Gauss'sche Kurve dargestellt ist.

Wir können diesem Gedanken nicht folgen. Vom Alter 70 an etwa folgen zwar die Verteilungen fast genau einer Gauss'schen, doch wenn wir der Lorenz'schen Annahme nachgehen, so ergäbe sich in den Altern 35 bis 45 eine Sterblichkeit, die nahezu Null ist. In einem Grenzalter — etwa 40 — wäre sie sogar genau gleich Null. Wir hätten dann also als Alter 40 ein sozusagen unsterbliches Alter.

Andererseits zwingen jedoch die aus den Sterbetafeln zu beobachtenden säkularen Sterblichkeitsänderungen zu einer eingehenden Untersuchung. Diese Untersuchungen, die zuerst von Richmond [19]) für Großbritannien angestellt wurden, haben für die deutschen Sterbetafeln zu dem Er-

---

17) Gesunde Praxis, kranke Wissenschaft. — Zeitschr. f. d. ges. Vers.-Wissenschaft Bd. 35, H. 2.

18) Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik. — Jena 1903.

19) Neue Sterblichkeitserfahrungen in Großbritannien. Veröffentl. des Deutschen Vereins für Vers.-Wiss. 1926, H. 39.

gebnis geführt, daß die Sterblichkeitsabnahme in Deutschland zur Zeit linear ist.

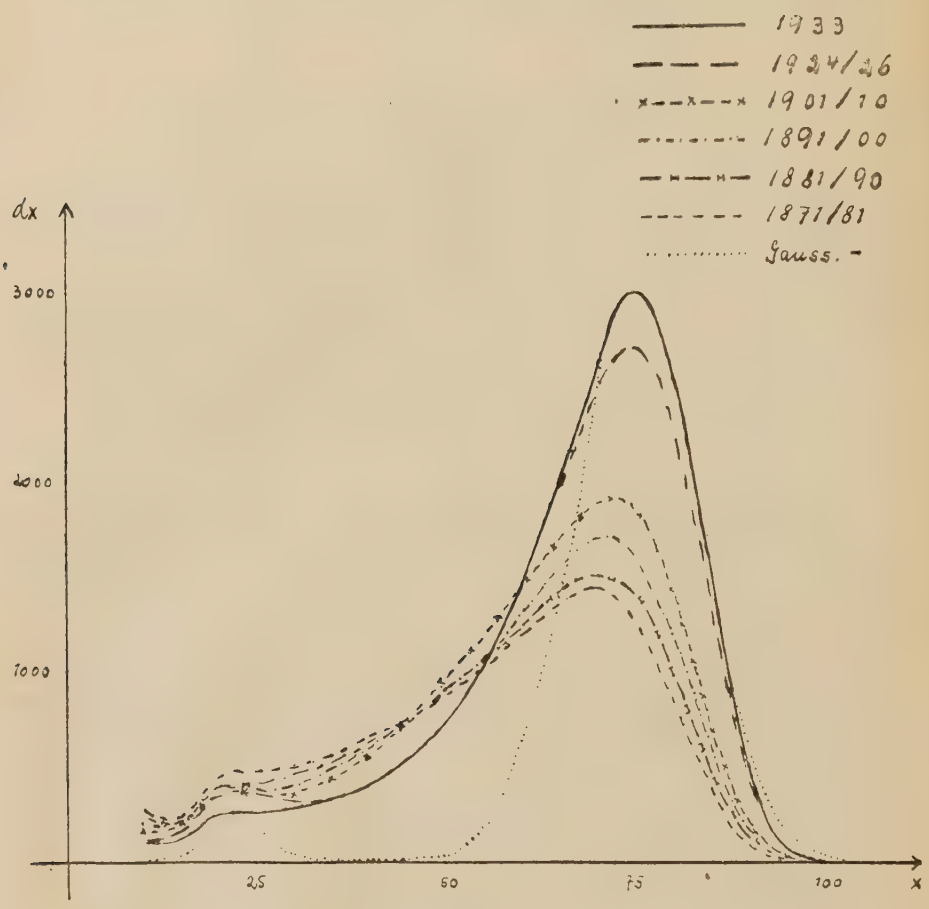

Fig. 5.

Die Untersuchung für Deutschland wurde zuerst von Riebesell[20]) durchgeführt, der zu dem obigen Ergebnis gelangte. Funke[21]) kommt zu demselben Ergebnis in erster Annäherung. Ueber die Abweichungen der Sterbequotienten vom Trend (unter dem Trend verstehen wir den linea-

[20]) Ueber Sterblichkeitserfahrungen in Deutschland. — Zeitschr. f. d. ges. Vers.-Wiss. Bd. 27, H. 1,

[21]) Die säkularen Sterblichkeitsschwankungen in Deutschland. — Dissertation Leipzig 1935.

ren Abfall der Sterbewahrscheinlichkeiten) hat Lange[22]) eine Untersuchung angestellt und kommt zu dem Ergebnis, daß die Häufigkeiten der Abweichungen eine normale Zufallskurve bilden.

Es ist aber klar, daß das Ergebnis der Untersuchungen nur eine nachträgliche Feststellung ist und sein kann, und daß wir daraus keine Folgerungen für die fernere Entwicklung ziehen dürfen; denn wir würden damit einmal zu dem Wert Null gelangen, der unmöglich ist.

Doch auch ob diese Tendenz der linearen Abnahme der Sterblichkeit wenigstens für die nächste Zukunft zutreffen wird, können wir nicht behaupten. Wie sehr man mit solchen Prognosen fehl gehen kann, zeigen die Aenderungen der Gompertz-Makeham'schen Konstanten.

10. Die säkularen Aenderungen der Gompertz-Makeham-schen Konstanten.

Cramér[23]) hat die Aenderungen der Konstanten des Gompertz-Makeham'schen Gesetzes für die schwedische Bevölkerung untersucht. Er geht aus von der Form $\mu_x = A + B c^x$. Die Beobachtungsperiode erstreckte sich von 1800 bis 1930. Cramér kommt zu dem Ergebnis, daß sich die Konstanten c und B während der Beobachtungszeit stark geändert haben und zwar c steigend und B fallend. Da die Aenderungsgeschwindigkeit in dem letzten Teil der Beobachtungszeit sehr gering wurde, vermutet er, daß diese beiden Werte festen Grenzwerten zustreben. Für A beobachtete Cramér ein lineares Abfallen.

Zum Vergleich betrachten wir die Schwankungen der Konstanten für die deutschen Sterbetafeln.

Wir wollen die Konstanten aus der zweiten Form des Gesetzes

---

22) Untersuchungen über die jährl. Schwankungen der Schadensquotienten in der Lebens- u. Feuerversicherung. — Wirtschaft u. Recht der Vers. Beiheft zu „Die öffentl. rechtl. Vers.". 1932.

23) Ueber die säkulare Sterblichkeitsabnahme. — Festschrift für Höckner. Berlin 1935.

$$l_x = k\, s^x\, g^{c^x}$$

berechnen.

Zum Vergleich mit den Ergebnissen Cramér's haben wir dann die Gleichungen

$$s = e^{-A}; \quad c = c; \quad g = e^{-\frac{B}{\ln c}}$$

$$(A, B>0; \; c>1)$$

Da — nach Cramér — A fallend ist, müßte sich s steigend ergeben. c ergab sich steigend, B fallend. Demnach müßte auch g steigen, ebenso c.

Wir berechnen die Konstanten nach dem Verfahren, das von King-Hardy im Textbook eingeschlagen wurde, benutzen jedoch nur 4 Werte (x : 20, 40, 60, 80.) Damit bekommen wir natürlich nicht die genauen Konstantenwerte. Doch ist dies für uns auch nicht erforderlich, da wir ja nur die Werte der verschiedenen Tafeln miteinander vergleichen wollen. (Siehe die graphische Darstellung auf der nächsten Seite. Die einzelnen Tafeln sind durch ihren Mittelwert gekennzeichnet.)

Es ergeben sich folgende Werte:

Tafel	c	s	g	k
1876,5	1,088	0,9934	0 9976	67 351
1886	1,0871	0,9941	0,9975	69 530
1896	1,0858	0,9958	0,9973	71 762
1906	1,0859	0,99676	0,9974	76 388
1925,5	1,1094	0,99665	0,9996	89 320
1933,5	1,1116	0,9975	0,9997	92 052

Man erkennt, wie gerade die Werte der neuesten Tafeln aus den älteren Werten herausfallen, und es dadurch unmöglich wird, Annahmen für die Zukunft aufzustellen.

Während man vor Veröffentlichung der Tafel 24/26 noch annehmen konnte, daß das ‚c' der einzelnen Tafeln annähernd konstant ist, ja sogar im Gegensatz zu Cramérs Ergebnis für die schwedische Bevölkerung eine schwach fallende Tendenz bemerkbar ist, zeigen die neueren Werte das Gegenteil; dasselbe beobachten wir bei der Konstanten ‚g'. ‚k' zeigt ein konstantes annähernd lineares Ansteigen,

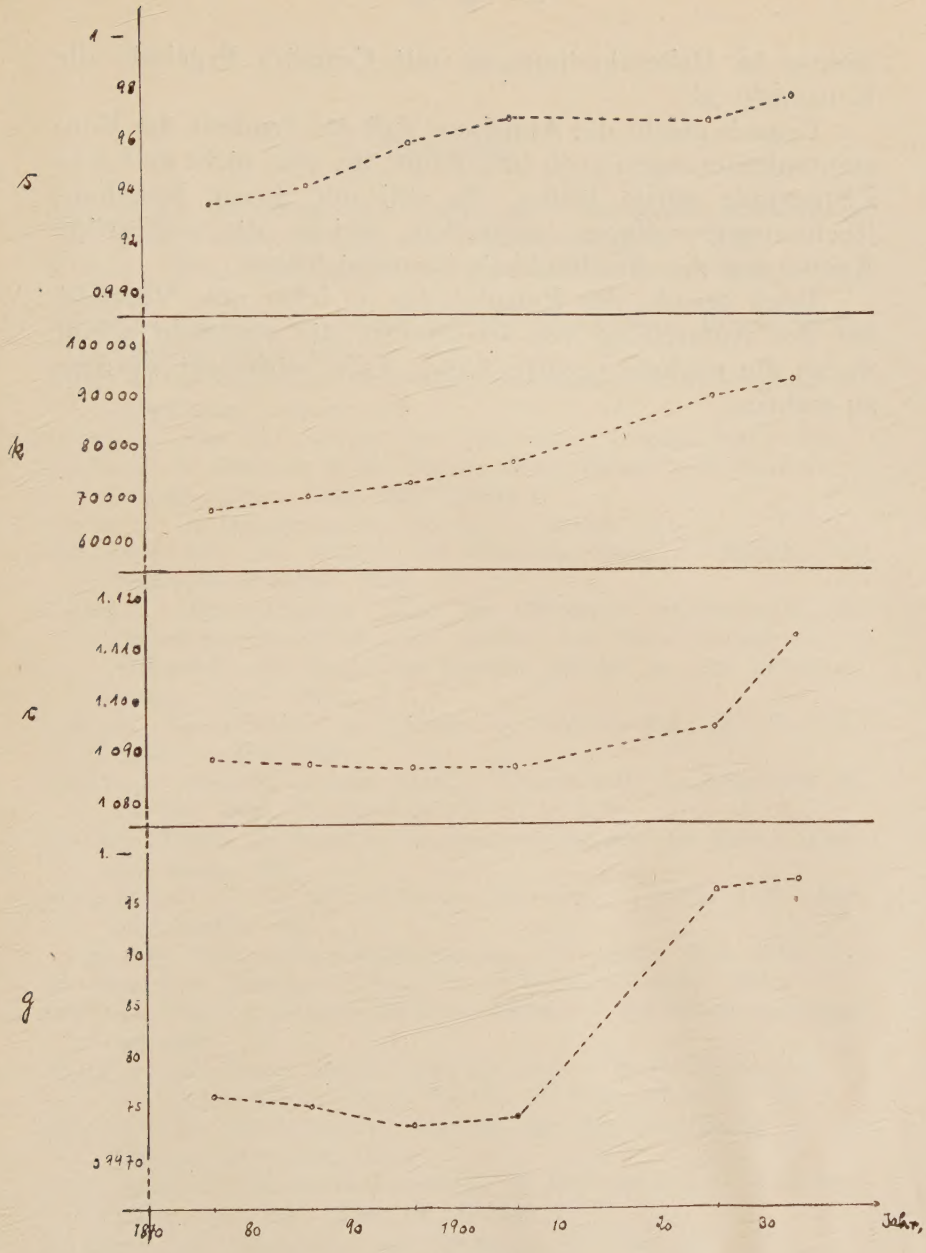
s
1 —
98
96
94
92
0.990
k
100 000
90000
80000
70000
60000
c
1.120
1.110
1.100
1 090
1 080
g
1. —
95
90
85
80
75
3 9470
1890
80
90
1900
10
20
30
Jahr,

Fig. 6.

ebenso in Uebereinstimmung mit Cramérs Ergebnis die Konstante ‚s'.

Cramér macht die Annahme, daß die Tendenz der Konstantenänderungen auch in Zukunft für eine nicht zu kurze Zeitperiode gültig bleibe. Er will mit dieser Annahme Rechnungsgrundlagen aufstellen, welche die zukünftige Aenderung der Sterblichkeit berücksichtigen.

Doch gerade das Beispiel des ‚c' lehrt uns, Vorsicht bei der Aufstellung von Prognosen, die vielleicht schon durch die nächste veröffentlichte Tafel widerlegt werden, zu wahren.

Literatur.

Blaschke: Die Statistischen Mittelwerte. — Wirtschaft und Recht der Vers. Beiheft zu Versich. u. Geldwirtsch. 1935.

Bruns: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. Leipzig 1906.

Cramér: Ueber die säkulare Sterblichkeitsabnahme. Festschrift für Höckner, Berlin 1935.

Funke: Die säkularen Sterblichkeitsschwankungen in Deutschland. — Dissertation Leipzig 1935.

Gumbel: Das Zufallsgesetz des Sterbens. — Leipzig, Berlin 1932.

Halley: An Estimate of the Degree of the Mortality of Mankind. — London Philos. Trans. Bd. 35 Heft 2.

Keynes: A Treatise on Probability. — London 1921.

Küpfmüller: Zur Analyse der Absterbeordnung. — Zeitschr. Die Naturwissenschaften 1921.

Lange: Untersuchungen über die jährlichen Schwankungen der Schadensquotienten in der Lebens- und Feuerversicherung — Wirtschaft und Recht der Versich. Beiheft zu„ Die öffentlich, rechtl. Vers.", 1932.

Lexis: Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik! — Jena 1903.

Lorenz: Gesunde Praxis, kranke Wissenschaft. — Zeitschrift für die ges. Vers. Wissenschaft Bd. 35 Heft 2.

Lorey: Tafeln zur Mathem. des Geldverkehrs und der Vers. — Leipzig, Berlin 1931.

Makeham: Of the Law of human Mortality. — Journal of the Inst. of Actuaries 1860.

v. Mises: Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Leipzig, Wien 1931.

De Moivre: Treatise of Annuities on Lives. — London 1724.

Pütter: Zur Physiologie der Lebensdauer. — Die Naturwissenschaften 1920.

Richmond: Neue Sterblichkeitserfahrungen in Großbritannien. — Veröffentl. des Deutschen Vereins für Vers. Wiss. 1926 H. 39.

Riebesell: Nochmals die Analyses der Absterbeordnung. — Die Naturwissenschaften 1921.

— Ueber Sterblichkeitserfahrungen in Deutschland. — Zeitschrift für die ges. Vers. Wiss. Bd. 27, Heft 1.

Streit: Das Gumbelsche Absterbegesetz. — Diss. Bern 1934.

Wittstein: Das mathematische Gesetz der menschlichen Sterblichkeit. — Hannover 1883.

Lebenslauf.

Am 25. Dezember 1910 wurde ich in Stettin geboren und kam dort Ostern 1917 in das Schiller-Realgymnasium. Im Januar 1919 trat ich in die Friedrich-Wilhelms-Oberrealschule über. Nach erfolgter Reifeprüfung im Jahre 1931 ging ich an die Universität nach Göttingen, um Mathematik zu studieren, und kam von dort zur Beendigung des Studiums Ostern 1933 nach Berlin. Seit Dezember 1936 bin ich beruflich tätig; im Februar dieses Jahres habe ich mich vermählt.

Richard Käding.